Eksamen på Økonomistudiet. Sommeren 2011

DYNAMISKE MODELLER

Valgfag

Mandag den 6. juni 2011

(3 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. Dog må der ikke medbringes lommeregnere eller anvendes nogen form for elektroniske hjælpemidler)

Vi henleder din opmærksomhed på, at du skal besvare eksamensopgaven på det sprog, som du har tilmeldt dig ved eksamenstilmeldingen. Har du tilmeldt dig fagets engelske titel, skal du besvare det engelske opgavesæt på engelsk. Har du tilmeldt dig fagets danske titel eller den engelske titel med "eksamen på dansk" i parentes, skal du besvare det danske opgavesæt på dansk.

Er du i tvivl om, hvad du har tilmeldt dig, fremgår det af printet med din tilmelding fra de studerendes selvbetjening.

KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

2. ÅRSPRØVE 2011 S-2 DM ex

SKRIFTLIG EKSAMEN I DYNAMISKE MODELLER

Mandag den 6. juni 2011

Opgavesæt bestående af 3 sider med i alt 4 opgaver.

Løsningstid: 3 timer

Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke medbragte lommeregnere eller nogen form for cas-værktøjer.

Opgave 1. Vi betragter fjerdegradspolynomiet $P : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ givet ved

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P(z) = z^4 + 5z^3 + 10z^2 + 10z + 4.$$

Desuden betragter vi differentialligningerne

$$(*) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^3x}{dt^3} + 10\frac{d^2x}{dt^2} + 10\frac{dx}{dt} + 4x = 0$$

og

$$(**) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^3x}{dt^3} + 10\frac{d^2x}{dt^2} + 10\frac{dx}{dt} + 4x = e^{-t}.$$

(1) Vis, at

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P(z) = (z^2 + 3z + 2)(z^2 + 2z + 2),$$

og bestem dernæst alle rødderne i polynomiet P.

(2) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$, og godtgør, at $(*)$ er globalt asymptotisk stabil.

(3) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$.

(4) Løs differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + y = 0.$$

(5) Lad $a > 0$. Løs differentialligningen

$$(\S) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + (\ln(a))\frac{dy}{dt} + y = 0$$

for et vilkårligt $a > 0$.

Opgave 2. Vi betragter differentialligningssystemerne

$$(\$) \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x + y \\ \frac{dy}{dt} = x - 5y \end{cases}$$

og

$$(\$\$) \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x + y + 3 \\ \frac{dy}{dt} = x - 5y - 9 \end{cases}.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet ($), og begrund, at dette system er globalt asymptotisk stabilt.

(2) Bestem den specielle løsning $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ til ($), således at betingelsen $(\tilde{x}(0), \tilde{y}(0)) = (1, 7)$ er opfyldt.

(3) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet ($$).

Opgave 3. Vi betragter vektorfunktionen $\mathbf{f} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ givet ved

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \mathbf{f}(x, y) = (x^2 + y^2, e^{xy}).$$

Desuden betragter vi mængden

$$A = \{(u, v) \in \mathbf{R} \mid u > 0 \land -1 < v < 2\}.$$

(1) Bestem Jacobimatricen (funktionalmatricen) $D\mathbf{f}(x, y)$ for vektorfunktionen $\mathbf{f}$ i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Bestem determinanten $\det D\mathbf{f}(x, y)$ for Jacobimatricen $D\mathbf{f}(x, y)$ i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Bestem dernæst mængden

$$L = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid D\mathbf{f}(x, y) \text{ er regulær}\},$$

og vis, at L er åben.

(3) Vis, at mængden A er åben og konveks.

(4) Vis, at mængden

$$P = \mathbf{f}^{-1}(A) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \mathbf{f}(x, y) \in A\}$$

åben. Mængden P er originalmængden for vektorfunktionen $\mathbf{f}$ til mængden A.

Opgave 4. Vi betragter korrespondancerne $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ og $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$F(x) = \begin{cases} [0,1], & \text{for } x < 0 \\ [-1,2], & \text{for } x = 0 \\ [-1,0], & \text{for } x > 0 \end{cases}$$

og

$$G(y) = \begin{cases} [y,0], & \text{for } y < 0 \\ ]0,1], & \text{for } y = 0 \\ [0,1], & \text{for } y > 0 \end{cases} .$$

(1) Vis, at korrespondancen F har afsluttet grafegenskaben.

(2) Vis, at korrespondancen F ikke er nedad hemikontinuert.

(3) Vis, at korrespondancen F er opad hemikontinuert.

(4) Vis, at korrespondancen G ikke er nedad hemikontinuert.

(5) Bestem er forskrift for den sammensatte korrespondance $G \circ F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.